APPLICATIONS DE LA DERIVATION

I. Dérivée et sens de variation :

1) TP Géogébra

Inspiré des activités 1 et 2 p 138 (Manuel Hatier Variations Maths 2019)

Activité 1 :

On donne la fonction f définie sur $[-3\,;3]$ par $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x + 2$.

1) a) A l'aide de géogebra, tracer la courbe représentative de la fonction f.

Saisie: Fonction(<Fonction>, <de>, <à>)

Remplacer <Fonction> par (1/3)*x^3–x+2 ; <de> par –3 et <à> par 3.

b) Compléter par lecture graphique, le tableau de variations de f sur $[-3\,;3]$

x	
Variations de f	

2) a) Créer un curseur a avec l'outil curseur . Intervalle : $[-3\,;3]$ Incrément : 0,1.
Placer le point A (a ; f(a)) .

Saisie: A= (a , f(a))

Bouger la valeur du curseur et vérifier que le point A se déplace sur la courbe de f.

b) Créer la tangente à la courbe de f au point A à l'aide de l'outil tangente .
Bouger la valeur du curseur et vérifier que la tangente se déplace avec le point A.

c) Compléter le tableau suivant en vous servant de l'équation réduite de la tangente affichée dans la fenêtre d'algèbre.

x	– 3	– 2	– 1	0	1	2	3
$f'(x)$							

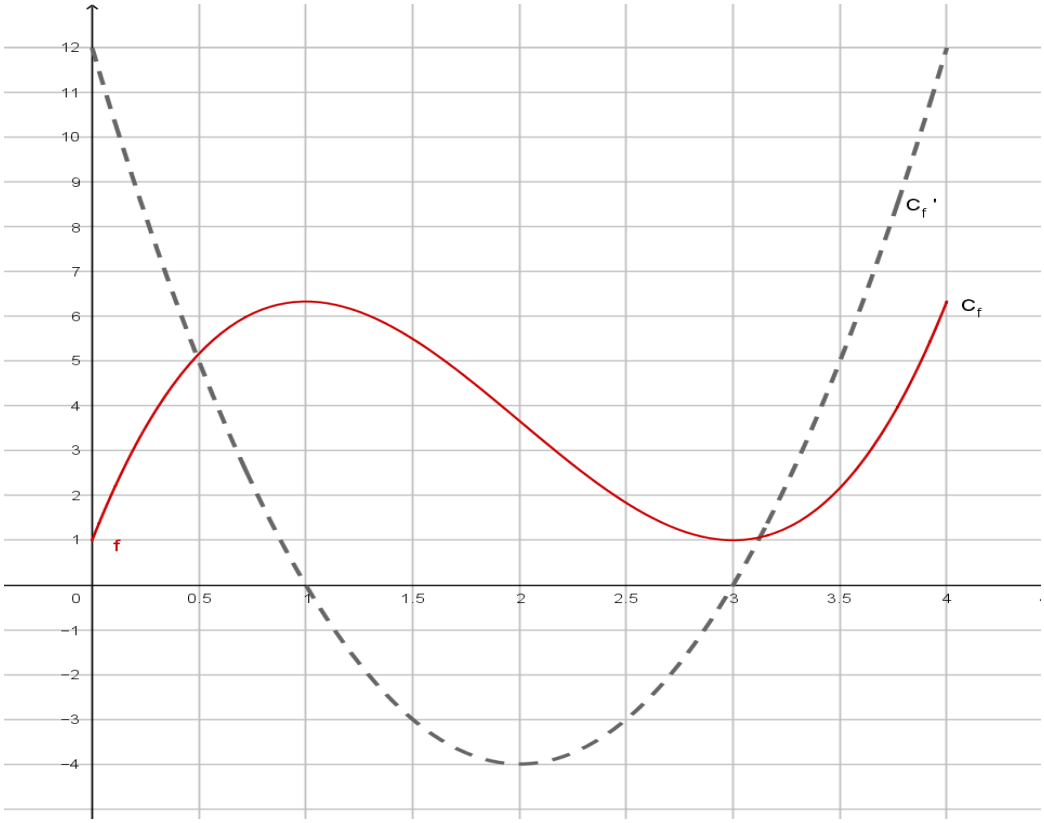
3) Conjecturer un lien entre le signe du nombre dérivé et les variations de la fonction f.

Activité 2 :

1) Dans le plan muni d'un repère, on a représenté :

en trait plein, la courbe d'une fonction f définie sur [0 ; 4]

en pointillés, la courbe de la fonction f' sur [0 ; 4].



a) Par lecture graphique, compléter le tableau de signes de la dérivée $f'(x)$ et le tableau de variations de la fonction f sur [0 ; 4] .

x	
Signes de $f'(x)$	

x	
Variations de f	

b) Conjecturer un lien entre le signe de la dérivée et les variations de la fonction.

2) A l'aide de géogébra, représenter la fonction $g(x) = -x^2$ et sa dérivée.

Compléter par lecture graphique :

x	
Signes de $g'(x)$	
Variations de g	

3) A l'aide de géogébra, représenter la fonction $h(x) = -x^3 + 3x - 2$ et sa dérivée.

Compléter par lecture graphique :

x	
Signes de $h'(x)$	
Variations de h	

4) La conjecture établie au 1)b) est-elle encore vérifiée ?

2) Théorèmes

a) Théorème n°1

f est une fonction dérivable sur un intervalle I.

- **Si pour tout nombre réel x de I, $f'(x) > 0$ sauf éventuellement en un nombre fini de points où f' s'annule alors f est strictement croissante sur I.**
- **Si pour tout nombre réel x de I, $f'(x) < 0$ sauf éventuellement en un nombre fini de points où f' s'annule alors f est strictement décroissante sur I.**
- **Si pour tout nombre réel x de I, $f'(x) = 0$ alors f est constante sur I.**

Démonstration : voir livre p 134

b) Théorème n°2 :

f est une fonction dérivable sur un intervalle I.

- **Si f est croissante sur I alors pour tout nombre réel x de I, $f'(x) \geq 0$.**
- **Si f est constante sur I alors pour tout nombre réel x de I, $f'(x) = 0$.**
- **Si f est décroissante sur I alors pour tout nombre réel x de I, $f'(x) \leq 0$.**

Démonstration : voir livre p 135

c) Applications

(i) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 7$.
Calculer $f'(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}$ et en déduire le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.

(ii) On considère la fonction g définie sur $[0; 9]$ par $g(x) = \frac{5+x}{1+x}$.
Dresser le tableau de variation de g.

Exercices sur dérivées et sens de variation :

n° 29 et 30 page 144.

n° 32 ; 33 ; 35 et 37 page 145.

n° 45 ; 47 ; 50 ; 51 ; 52 et 56 page 147.

II. Extrémum d'une fonction

1) Extremum local d'une fonction

a) Définitions

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Soient m et M des réels.

- **M est le maximum f sur I, atteint en a, si $f(a) = M$ et si pour tout x de I, $f(x) \leq M$.**
- **m est le minimum f sur I, atteint en b, si $f(b) = m$ et si pour tout x de I, $f(x) \geq m$.**
- **Un extremum de f sur I est un maximum ou un minimum de f sur I.**
- **On dit que le réel L est un maximum (respectivement un minimum) local de f sur I s'il existe un intervalle ouvert J contenu dans I, tel que L est le maximum (respectivement le minimum) de f sur J.**

b) Exemple

Sur le schéma ci-contre :

Le maximum de f sur $[-5; 3]$est

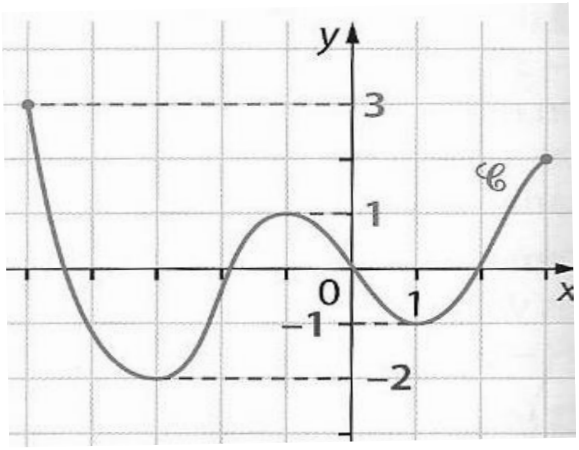
Il est atteint en

Le minimum de f sur $[-5; 3]$est

Il est atteint en

est un maximum local de f, car est le maximum de f sur $J =]-2; 0[$

est un minimum local de f, car est le minimum de f sur $J' =]0; 2[$.



2) Extremum local et dérivée

a) Propriétés :

- **Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$.**
  Si f admet un extremum en x_0 de I alors $f'(x_0) = 0$.

- **Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I et x_0 un réel de I.**
  Si f' s'annule en x_0 en changeant de signe, alors f admet un extremum local en x_0.

x	a		x_0		b
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘	minimum	↗	

x	a		x_0		b
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		↗	maximum	↘	

b) Interprétation graphique

Dans les conditions des propriétés précédentes, la courbe représentative de la fonction f dans un repère admet en x_0 une tangente parallèle à l'axe des abscisses.

<u>Idée de la démonstration : voir livre p 136</u>

c) Applications

i) Soit f la fonction définie sur $[-7\,;7]$ par $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$

Justifier que pour tout réel x de $[-7\,;7]$ on a : $-\dfrac{1}{2} \leq f(x) \leq \dfrac{1}{2}$

ii) Démontrer que pour tout réel $\boldsymbol{x} \geq 0$ on a : $x^3 \geq 3\boldsymbol{x} - 2$.

<u>Exercices sur extréma et dérivées :</u>

n° 57 ; 58 ; 62 ; 63 ; 64 ; 65 ; 66 ; 67 et 69 page 148.

n° 70 ; 71 et 72 page 149.

III. Application au sens de variation d'une suite numérique

1) Propriété (admise) :

Si f est une fonction définie et monotone sur $[\,p\,;\,+\infty\,[$ et si (u_n) est la suite définie, pour tout entier $n \geq p$, par $u_n = f(n)$, alors la suite (u_n) a la même monotonie que la fonction f.

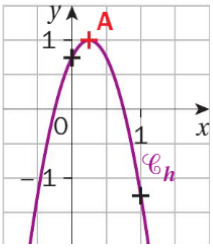
2) Applications (d'après le manuel Hatier Variations Maths 2019)

À l'aide d'une fonction, déterminer les variations de chacune des suites ci-dessous.

a. (u_n) définie, pour tout entier naturel n non nul, par $u_n = \dfrac{1}{n}$.

b. (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = \sqrt{n}$.

c. (w_n) définie, pour tout entier naturel n, par $w_n = h(n)$, avec h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = -4(x-0{,}25)^2 + 1$, dont la représentation graphique ci-contre a pour sommet le point A d'abscisse 0,25.



IV. Quelques problèmes concrets d'optimisation:

<u>1er problème</u> : n° 96 page 154

<u>2ème problème</u> n° 98 page 154.